Capítulo 14

lunes, 1 de abril de 2019 8:18

1.- Comprobar que para:

$$\mathbf{f''(x) - f(x) = g(x);\ g(x) = x^2}$$

El valor de:

$$\mathbf{f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x,s)\, g(s)\, ds\,;\ f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{1}{2} e^{-|x-s|}\, s^2 ds}$$

Es solución de la ecuación.

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{1}{2} e^{-|x-s|}\, s^2 ds = \underbrace{\int_{-\infty}^{x} -\frac{1}{2} e^{s-x}\, s^2 ds}_{\text{para s<x}} + \underbrace{\int_{x}^{\infty} -\frac{1}{2} e^{x-s}\, s^2 ds}_{\text{para s>x}}$$

$$dv = -\frac{1}{2} e^{s-x} ds;\ u = s^2\ ;\ v = -\frac{1}{2} e^{s-x};\ du = 2s \cdot ds$$
$$dv' = e^{s-x} ds;\ u' = s\ ;\ v' = e^{s-x};\ du' = ds$$

$$\int -\frac{1}{2} e^{s-x}\, s^2 ds = -\frac{1}{2} e^{s-x} \cdot s^2 + \int e^{s-x}\, s ds = -\frac{1}{2} e^{s-x} \cdot s^2 + e^{s-x}\, s - \int e^{s-x}\, ds$$

$$= e^{s-x}\left(-\frac{1}{2} s^2 + s - 1\right)$$

$$dv = -\frac{1}{2} e^{x-s} ds;\ u = s^2\ ;\ v = \frac{1}{2} e^{x-s};\ du = 2s \cdot ds$$
$$dv' = e^{x-s} ds;\ u' = s\ ;\ v' = -e^{x-s};\ du' = ds$$

$$\int -\frac{1}{2} e^{x-s}\, s^2 ds = \frac{1}{2} e^{x-s} \cdot s^2 - \int e^{x-s}\, s ds = \frac{1}{2} e^{x-s} \cdot s^2 + e^{x-s}\, s + \int e^{x-s}\, ds$$

$$= \frac{1}{2} e^{x-s} \cdot s^2 +\ s + e^{x-s} = e^{x-s}\left(\frac{1}{2} s^2 + s + 1\right)$$

$$f(x) = \left[e^{s-x}\left(-\frac{1}{2} s^2 + s - 1\right)\right]_{-\infty}^{x} + \left[e^{x-s}\left(\frac{1}{2} s^2 + s + 1\right)\right]_{x}^{\infty} = \left(-\frac{1}{2} x^2 + x - 1\right) - \left(\frac{1}{2} x^2 + x + 1\right)$$
$$= -x^2 - 2$$

$$f'(x) = -2x;\quad f''(x) = -2\ \Rightarrow\ -2 - \left(-x^2 - 2\right) = x^2;\ -2 + x^2 + 2 = x^2$$

2.- **¿Qué tiene que ver el operador $A = \frac{d^2}{dx^2} - 1$ con la matriz B=**$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$?

Según el spoiler del final del capítulo 7 (cálculo del valor esperado), el cálculo de la Función de Green de una ecuación diferencial es análogo a calcular la inversa del operador ($\boldsymbol{A^{-1}}$), siendo esto la conexión entre el mundo continuo (inversa del operador) y el discreto (inversa de la matriz). En este caso la matriz se obtiene por el metodo de diferencias finitas, haciendo tender a un valor muy pequeño entre cada punto, por ejemplo de $\Delta x = 1/100$.

$$Bf(x) = g(x)$$

$$f''(x) \approx \frac{f(x_{i-1}) - 2f(x_i) + f(x_{i+1})}{\Delta x^2}; \quad \frac{f(x_{i-1}) - 2f(x_i) + f(x_{i+1})}{\Delta x^2} - f(x_i) \approx x_i^2$$

$$f(x_{i-1}) - 2f(x_i) + f(x_{i+1}) - f(x_i)\Delta x^2 = x_i^2 \Delta x^2; \;\; f(x_0) = f(x_{n+1}) = 0$$

$$f(x_{i-1}) - (2 + \Delta x^2)f(x_i) + f(x_{i+1}) = x_i^2 \Delta x^2; \;\; si\ \Delta x \ll 1 \Rightarrow \Delta x^2 \approx 0$$

$$-f(x_{i-1}) + 2f(x_i) - f(x_{i+1}) = 0$$

$$-f(x_0) + 2f(x_1) - f(x_2) = 0.0001 \cdot x_1^2 \;\; \text{para } i = 1$$
$$-f(x_1) + 2f(x_2) - f(x_3) = 0.0001 \cdot x_2^2 \;\; \text{para } i = 2$$

Vemos que obtenemos para cada i una fila de los coeficientes de la matriz B.